

### Пример: уравнение переноса

Одно из самых простых уравнений в частных производных – это *уравнение переноса* (по другому, *адвекции*):

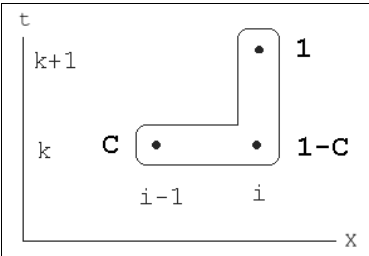


Рис. 18. Шаблон явной схемы

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \phi(u, x, t) \quad (34)$$

Для численного решения уравнения переноса можно использовать явную разностную схему:

$$\hat{u}_i - u_i + c \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta} = \frac{(\phi_{i-1} + \phi_i)}{2} \quad (35)$$

которая определена шаблоном рис. 18. (Символом с «крышкой» мы по-прежнему обозначаем значение сеточной функции с верхнего слоя по времени.) Как несложно убедиться, эта схема является устойчивой при меньшем единицы числе Куранта, которое для схемы (35) имеет вид:

$$C \equiv \frac{c\tau}{\Delta} < 1 \quad (36)$$

Уравнение переноса (при нулевом источнике, определяемом его правой частью) и постоянной скорости переноса с имеет решение в виде начального профиля  $u(x, t=0)$ , перемещающегося вдоль оси  $x$  со скоростью  $c$ . Результаты расчета по схеме (35) показаны на рис. 19. Начальный профиль изображен сплошной кривой, а решение через несколько шагов по времени – пунктиром.

Уравнение переноса описывает множество явлений: перемещение примеси в атмосфере под действием ветра (тогда  $u$  – это концентрация примеси, а  $c$  – скорость ветра) или движение автомобилей по шоссе (тогда  $u$  – это поток машин в некоторой точке шоссе, а  $c$  – средняя скорость этого потока). Вообще говоря, скорость переноса  $c$  может зависеть как от координат, так и от самой неизвестной функции  $u$ . В последнем случае уравнение

становится нелинейным и имеет ряд новых интересных свойств (см. ниже).

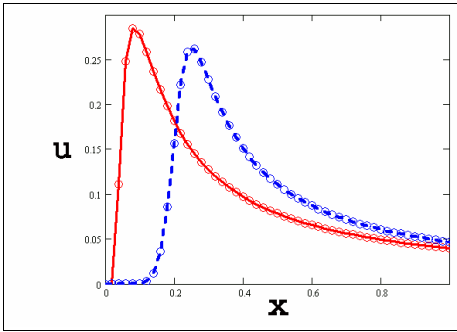


Рис. 19. Решение уравнения переноса

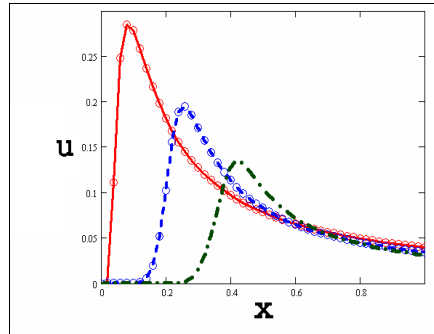


Рис. 20. Перенос с поглощением

Важный для дальнейших сведений случай связан с наличием ненулевого источника, зависящего от  $u$ , в простейшем варианте, линейно:

$$\phi_i(u) = -V \cdot u \quad (37)$$

Поскольку источник отрицателен, то уравнение (34) описывает *перенос с поглощением*. Коэффициент поглощения равен  $V$ . Решение по той же схеме (35) показано на рис. 20. Оно описывается перемещающимся (со скоростью  $c$ ) профилем начального возмущения, который, по мере распространения, затухает, вследствие поглощения.

### Пример: нелинейный перенос

Рассмотрим уравнение переноса, скорость которого  $c$  линейно зависит от неизвестной функции  $u(x,t)$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (c_0 + c_1 \cdot u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \phi(u, x, t) \quad (38)$$

Его решение посредством схемы (34) показано на рис. 21-23 для различных сочетаний коэффициентов  $c_0$  и  $c_1$ .

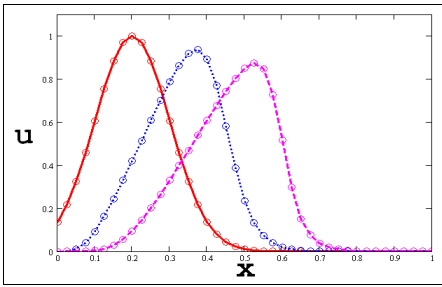


Рис. 21. Решение нелинейного уравнения переноса ( $c=5+2u$ )

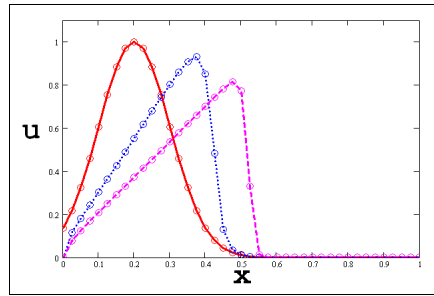


Рис. 22. Решение нелинейного уравнения переноса ( $c=0+5u$ )

Благодаря нелинейности, профиль решения изменяется с течением времени. Если  $c_1 > 0$ , то передний фронт решения становится более крутым (рис. 22). Так происходит потому, что (при фиксированном  $t^1$ ) участки решения  $u(x, t^1)$ , где оно велико, обгоняют участки с меньшим  $u(x, t^1)$ . В результате возникает разрывное решение типа ударной волны. Если  $c_1 < 0$ , то разрыв формируется на заднем фронте решения (рис. 23).

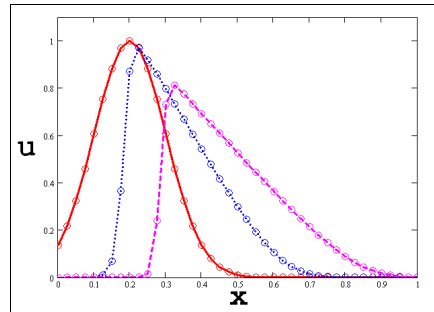


Рис. 23. Решение нелинейного уравнения переноса ( $c=10-5u$ )

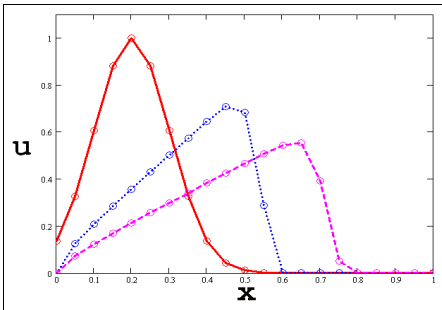
На самом деле, разрывного решения (рис. 21-23) при расчетах по явной схеме (34) получить не удастся, поскольку эта схема обладает свойством *аппроксимационной вязкости* и *диссипативности*, что приводит к «размытию» разрыва и уменьшению амплитуды фронта. Для исследования разрывных решений применяются специальные схемы. Отметим также, что более подробный анализ многих примеров, связанных с уравнением переноса, и соответствующих свойств разностных схем Вы найдете в прекрасной книге Н.Н. Калиткина.

### Пример: уравнение Бюргера

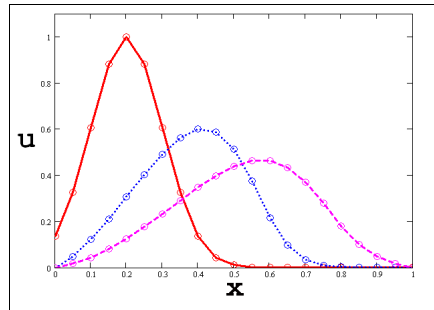
Еще усложним уравнение переноса, добавив в него диффузионное слагаемое:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c(u) \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = D \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} . \quad (39)$$

Это уравнение при  $c(u)=u$  называют *уравнением Бюргера*. Физически оно является хорошей моделью «автомобильной пробки».



**Рис. 24.** Решение уравнения Бюргера ( $c=20u$ ,  $D=0.05$ )



**Рис. 25.** Решение уравнения Бюргера ( $c=10+10u$ ,  $D=0.5$ )

Решение (39) при помощи комбинированной явной схемы, полученной объединением формул (4) и (34), показано на рис. 24-25. На рис. 24 приведен случай слабой, а на рис. 25 – сильной диффузии. В первом случае слагаемое, ответственное за нелинейный перенос приводит к образованию разрывных решений, а во втором, благодаря диффузии, разрыва не происходит, и фронт решения размывается.