§5. Метод Эйлера: явные разностные схемы

Вернемся к модели взаимодействия световых пучков (см. §2) и рассмотрим наиболее универсальный метод решения краевых задач (в скобках отмечая, что, как мы убедимся в следующей главе, он применим и к уравнениям в частных производных). Напомним, что речь идет о системе двух ОДУ:

$$\frac{dY(x)}{dx} = -a(x)\cdot Y(x) + r(x)\cdot y(x),$$
$$\frac{dy(x)}{dx} = +a(x)\cdot y(x) - r(x)\cdot Y(x). \qquad (32)$$

с граничными условиями:

$$Y(0)=I0,\ \ y(1)=R\cdot Y(1). \qquad (33)$$

Смысл разностного метода решения краевых задач заключается в аппроксимации исходных дифференциальных уравнений разностными уравнениями. Для этого расчетный интервал разбивается сеткой из N точек на (N-1) шагов (рис. 24). Для каждого i-го шага надо выписать соответствующие разностные уравнения, система которых называется *разностной схемой*.

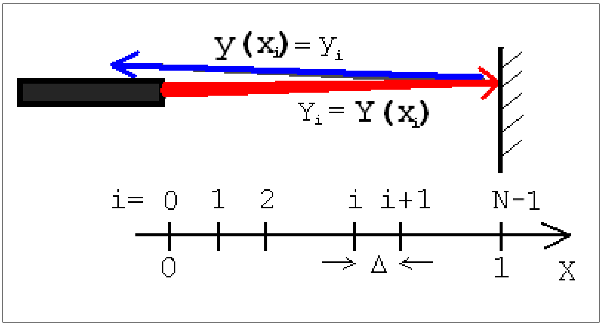

Рис. 24. *Сетка*

Чаще всего достаточно просто заменить первые производные из (32) их разностными аналогами (такой метод называется еще *методом Эйлера*):

$$\begin{aligned}&\frac{Y_{i+1}-Y_i}{\Delta}=-a_i\cdot Y_i+r_i\cdot y_i,\\&\frac{dy_{i+1}-y_i}{\Delta}=+a_i\cdot y_i-r_i\cdot Y_{i.}\end{aligned}\quad\text{(для } 0\le i\le N\text{-1).}\tag{34}$$

Вообще говоря, краевую задачу можно аппроксимировать не единственной разностной схемой. Существует несколько различных способов аппроксимации дифференциальных уравнений разностными. От выбора конкретного варианта зависит не только простота, быстрота и удобство вычислений, но и сама возможность получения правильного ответа.

Схема (24) построена так, что на каждом i-м шаге применяется двухточечная аппроксимация производной, причем значение правой части ОДУ берется с левого узла. Если представить этот принцип построения графически, то мы получим диаграмму, которую называют *шаблоном* разностной схемы (рис. 25). В результате использования данного шаблона все значения Y_{i+1} и y_{i+1}, находясь в левой части уравнений, выражаются явно через Y_i и y_i, в связи с чем сама разностная схема называется *явной*.

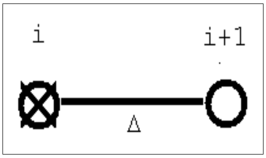

Рис. 25. *Шаблон явной схемы*

Перепишем разностные уравнения (34) в виде:

$$\begin{aligned}&Y_{i+1}+(\Delta a_i-1)Y_i-\Delta r_i y_i=0,\\&y_{i+1}+\Delta r_i Y_i-(\Delta a_i+1)y_i=0.\end{aligned}\quad\text{(для } 0\le i\le N\text{-1)}\tag{35}$$

Получилась система (по числу шагов) 2×(N-1) разностных линейных алгебраических уравнений с 2×N неизвестными Y_i и y_i. Для того чтобы она имела единственное решение, надо дополнить число уравнений до 2×N, записав в разностном виде оба граничных условия:

$$Y_0=I0,\ \ y_N=R\cdot Y_N.\tag{36}$$

Полученную разностную схему (35-36) можно записать в матричной форме, объединив векторы **Y** и **y** в общий неизвестный вектор **z**.

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{z}=\mathbf{b} \qquad (37)$$

Если сформировать вектор **z** простым слиянием «друг за другом» векторов **Y** и **y**, т.е., чтобы первые N элементов итогового вектора **z** представляли **Y** (излучение вперед), а последние N – вектор **y** (излучение назад), то матрица **A** будет иметь структуру, показанную на рис. 26. Вектор **b** включает в себя только нули, за исключением самого первого элемента, равного I0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.75 & 1 & 0 & 0 & 0 & -0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.25 & 1 \end{pmatrix}$$

Рис. 26. *Структура матрицы **A** при N=5, a=1, r=0.04*

Решение полученной разностной системы алгебраических уравнений (сокращенно, СЛАУ) называют *реализацией* разностной схемы. Самый распространенный способ численного решения «хороших» СЛАУ (а она, как легко убедиться, является хорошо обусловленной) – это алгоритм исключения Гаусса. Результат решения СЛАУ для N=5 показан на рис. 27.

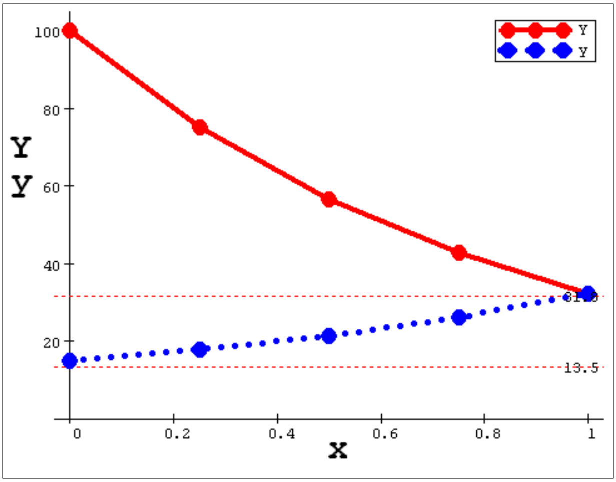

Рис. 27. *Решение задачи (37) (методом Гаусса)*

Для того, чтобы решить СЛАУ (37) (как говорят, «реализовать разностную схему»), мы применили стандартный метод исключения Гаусса, требующий совершения порядка N^2 операций. Однако, анализируя вид матрицы **A** на рис. 26, отметим, что она является довольно *разреженной* (т.е. содержит большой процент нулевых элементов). Более того, если совершить небольшую «перетасовку» ее строк и столбцов (а именно, формируя вектор **z** от узла к узлу, а не простым слиянием **Y** и **y**), то матрицу **A** можно привести к *трехдиагональному* виду. Для решения СЛАУ с такой матрицей разработан очень эффективный алгоритм, называемый *прогонкой* (см. §6.4).

В завершение раздела скажем, что дискретизация ОДУ, т.е. переход от (32) к (34), привела к тому, что вместо искомых непрерывных функций Y(x) и y(x) мы стали рассматривать их разностные аналоги, т.е. векторы с элементами Y_i и y_i. Эти Y_i и y_i задают искомые значения в узлах сетки, а продолжить их на внутренние точки сетки (если это требуется) легко, применяя тот или иной вид интерполяции. На рис. 27 была использована кусочно-линейная интерполяция, а более плавная сплайн-интерполяция приведена на рис. 28. Полученную посредством интерполяции через узлы непрерывную функцию называют *сеточной функцией*.

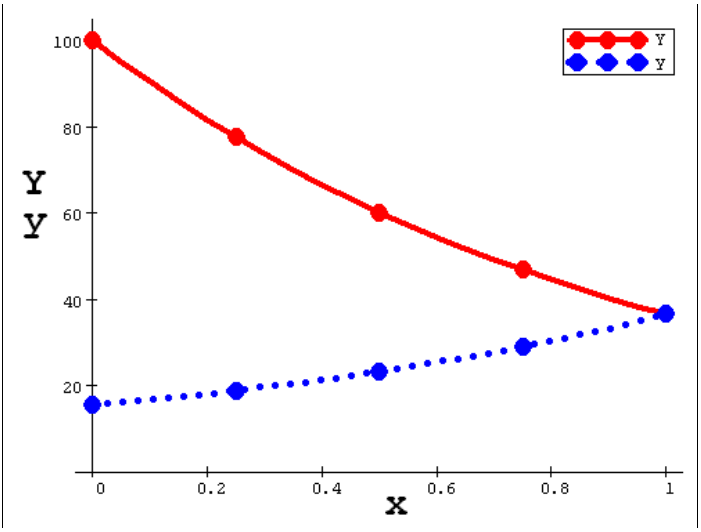

Рис. 28. *Сплайн-интерполяция сеточной функции*