§2. Пример: модель встречных световых пучков в среде

Чтобы лучше понять смысл краевых задач, рассмотрим их постановочную часть на конкретном физическом примере модели взаимодействия встречных световых пучков. Предположим, что надо определить распределение интенсивности оптического излучения в пространстве между источником (лазером) и зеркалом, заполненном некоторой средой (рис. 1). Будем считать, что от зеркала отражается R-я часть падающего излучения (т. е. его коэффициент отражения равен R), а среда как поглощает излучение с коэффициентом ослабления a(x), так и рассеивает его, причем коэффициент рассеяния назад равен r(x). В этом случае закон изменения интенсивности излучения, распространяющегося вправо Y(x), и интенсивности излучения влево y(x) определяется системой двух ОДУ первого порядка:

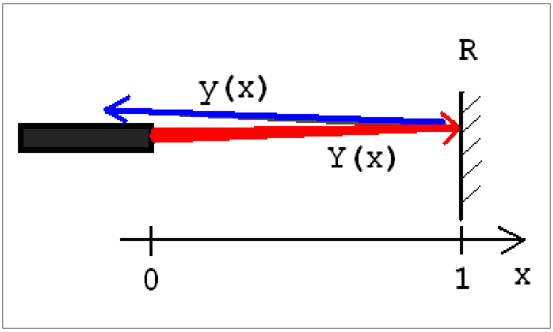

Рис.1. *Модель задачи (3)-(4)*

$$\frac{dY(x)}{dx} = -a(x)\cdot Y(x) + r(x)\cdot y(x),$$
$$\frac{dy(x)}{dx} = +a(x)\cdot y(x) - r(x)\cdot Y(x). \qquad (3)$$

Для правильной постановки задачи требуется, помимо уравнений, задать такое же количество граничных условий. Одно из них будет выражать известную интенсивность излучения I0, падающего с левой границы x=0, а второе – закон отражения на его правой границе x=1:

$$Y(0)=I0,\ \ y(1)=R\cdot Y(1). \qquad (4)$$

Сделаем самые общие предварительные замечания о характере сформулированной задачи, сопровождая их примерами расчетов.

Во-первых, в систему уравнений (3) входят производные только по одной переменной x, т.е. она является системой *обыкновенных* дифференциальных уравнений (ОДУ). Если бы мы стали рассматривать более сложные эффекты рассеяния в стороны (а не только вперед и назад), то в уравнениях появились бы частные производные по другим пространственным переменным y и z. В этом случае получилась бы краевая задача для *уравнений в частных производных*, решение которой гораздо сложнее ОДУ.

Во-вторых, полученная задача является *краевой*, т.к. условия поставлены не на одной, а на обеих границах интервала (0,1). В связи с этим, ее нельзя решить методами, предназначенными для задач с начальными условиями.

В третьих, если положить a(x)=const и r(x)=const, то мы получим случай *изотропного* (не зависящего от координаты x) поглощения и рассеяния (рис. 2). Данная задача имеет простое аналитическое решение в виде комбинации экспонент.

Если, напротив, рассматривать зависящие от координаты x коэффициенты ослабления и рассеяния, то мы получим *анизотропную* задачу (локальное поглощение и рассеяние изменяется в среде от точки к точке).

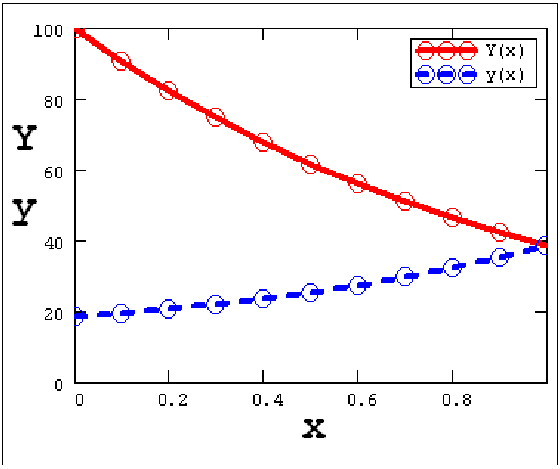

Рис.2. *Решение (3) для R=1, a(x)=1, r(x)=0.1*

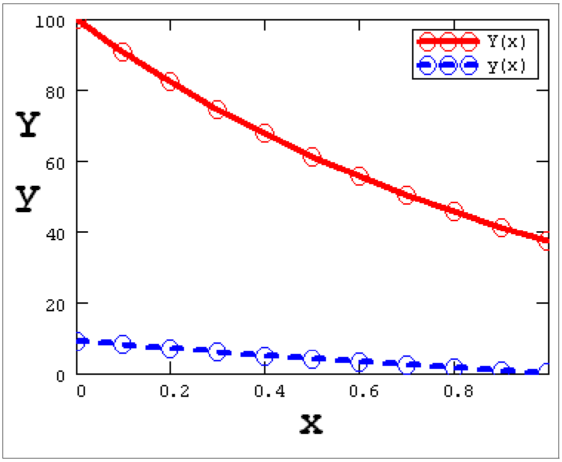

Рис.3. *Решение (3) при R=0, r(x)=0.2*

В четвертых, обратите внимание на то, что интенсивность пучков определяется не только поглощением, но и рассеянием встречного пучка. Таким образом, каждый из пучков «подпитывается» встречным. Например (рис. 3), при R=0 (отсутствие зеркала на выходе) встречного пучка на правой границе x=1 нет вовсе, но, по мере приближения к левой границе x=0, он формируется, благодаря «рассеянию назад» прямого пучка.

Возможно, мы преувеличили в модели этот эффект, однако, он очень важен с точки зрения демонстрации численных методов.

В пятых, физическая модель привела к *линейной* краевой задаче. Нетрудно сообразить, что она станет нелинейной, если сделать коэффициенты ослабления и рассеяния зависящими от интенсивности излучения: a(x,Y,y) и r(x,Y,y). Физически это будет соответствовать изменению оптических свойств среды под действием нагрева мощным излучением встречных пучков.

В шестых, при определенных сочетаниях параметров система ОДУ становится *жесткой*, и для решения соответствующей краевой задачи многие алгоритмы становятся неприменимыми (как это было в случае жестких задач Коши).

Решение анизотропных, нелинейных и жестких задач, будет обсуждаться ниже, при изложении методов их решения.