

§2. Аттракторы динамических систем

Посвятим этот раздел анализу поведения динамических систем на больших временах:

$$\dot{x}_i = f_i(\vec{x}, t, \vec{\mu}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (5)$$

Как мы уже говорили, в большинстве случаев, для анализа поведения динамической системы необходимо изучить только ее асимптотическое решение, называемое *аттрактором*. Рассмотрим для начала систему двух уравнений, $N=2$. Неизвестные функции обозначим через $x_1 \equiv x(t)$ и $x_2 \equiv y(t)$ и будем считать, что правые части каждого из уравнений зависят от этих неизвестных функций, а также некоторого параметра μ . Явной зависимости от времени функция $f(x, y)$ иметь не будет, так что система будет *автономной*, а зависимость от параметров x, y, μ будет гладкой. Решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f_1(x, y, \vec{\mu}), \\ \dot{y} &= f_2(x, y, \vec{\mu}). \end{aligned} \quad (6)$$

будем откладывать на фазовой плоскости. По осям абсцисс и ординат, соответственно, отложим функции $x(t)$ и $y(t)$ (рис. 3) Как Вы помните, отдельная задача Коши, соответствующая нашей системе уравнений, определяется, как дополнительное начальное условие к этой системе:

$$x^0 = x(0), \quad y^0 = y(0). \quad (7)$$

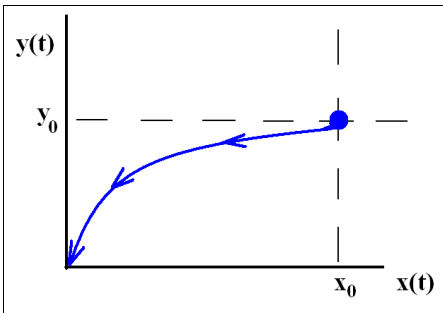


Рис. 3. Решение системы (6) на фазовой плоскости

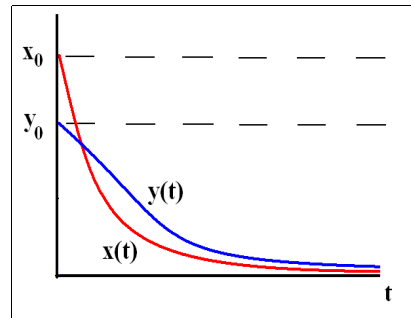


Рис. 4. Растровые графики решения системы (6)

Эта пара (x^0, y^0) на фазовой плоскости определяется точкой (рис 3). Теперь нам предстоит исследовать эту динамическую систему так, чтобы для практически всех возможных начальных условий оценить, каково будет поведение функций $x(t)$ и $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Надо сказать, что многие динамические системы демонстрируют такое схожее поведение. Независимо от начального условия, т.е. от того, из какой точки начинается движение, по прошествии большого времени функции $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к какой-то одной точке. Поясним сказанное. Помимо графика на фазовой плоскости, нарисуем растровые графики функций $x(t)$ и $y(t)$, выходящие из начальных условий (x^0, y^0) . Предположим, что свойство системы таково, что при $t \rightarrow \infty$ обе функции стремятся к нулю (рис 4):

$$x(t) \rightarrow 0 \text{ и } y(t) \rightarrow 0. \quad (8)$$

Соответствующая траектория решения на фазовой плоскости, выходя из точки (x^0, y^0) , кончается в начале координат (рис. 3).

Предположим, что, если посчитать решение системы ОДУ для других начальных условий, поведение системы будет примерно таким же. Выходя из другой точки $(\tilde{x}^0, \tilde{y}^0)$, решение все равно будет при $t \rightarrow \infty$ стремиться к нулю (рис. 5). Такую точку на фазовой плоскости, к которой асимптотически стремятся

решения, называют *особой точкой*. Рис. 6 схематически изображает *фазовый портрет* модельной системы (6), который состоит из единственной особой точки – устойчивого узла.

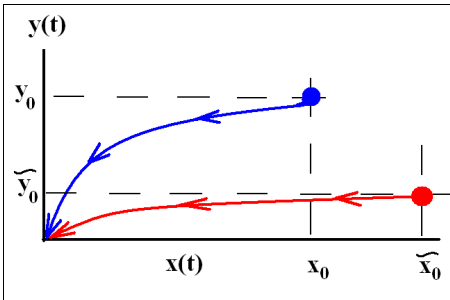


Рис. 5. Два решения (6), сходящиеся к одному аттрактору

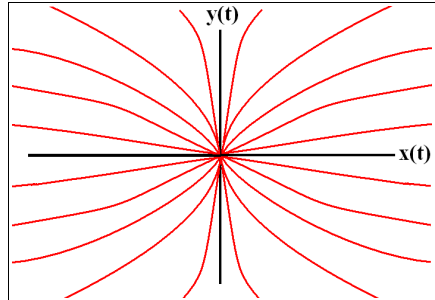


Рис. 6. Фазовый портрет динамической системы (6)

Что будет происходить, если мы решим нашу систему дифференциальных уравнений с начальными условиями ($x^0=0$, $y^0=0$)? Конечно, в этом случае решение запишется как: $x(t)=\text{const}=0$ и $y(t)=\text{const}=0$. (8+)

Таким образом, точка $(0,0)$ является *неподвижной точкой*. Если пара функций $x(t)$ и $y(t)$ при каком-то времени t попадает в эту точку, то она там и остается. Решение задачи Коши с начальными условиями $(0,0)$ дает $x(t)=\text{const}=0$ и $y(t)=\text{const}=0$, поэтому и их производные по времени будут равны нулю:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= 0, \\ \dot{y}(t) &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Если мы посмотрим на исходную систему дифференциальных уравнений (6), то сразу получим рецепт нахождения этих неподвижных точек. Поскольку, по определению, для неподвижной точки значения производной в них равны нулю, т.е. левые части уравнений равны нулю в точках (x^0, y^0) , то и правые части, естественно, будут равны нулю. Поэтому для неподвижных точек (x^0, y^0) нашей динамической системы мы можем смело приравнять функции f_1 и f_2 к нулю.

Таким образом, чтобы найти неподвижные точки динамической системы, достаточно вместо серии задач Коши для дифференциальных уравнений решить систему алгебраических уравнений такого вида:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, \vec{\mu}) &= 0, \\ f_2(x, y, \vec{\mu}) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Пример: осциллятор

Теперь приведем пример динамической системы и покажем, как осуществляется поиск ее неподвижных точек. Возьмем в качестве примера модель простейшего маятника, задаваемую дифференциальным уравнением второго порядка (см. 3.57):

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \quad (11)$$

Модель (11) описывает малые колебания маятника. В данном случае x является углом его отклонения от вертикали. Заменим дифференциальное уравнение второго порядка эквивалентной системой первого порядка. Для этого введем дополнительную неизвестную функцию $y(t)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x. \end{aligned} \quad (12)$$

Для полученной системы уравнений несложно найти неподвижную точку, или, как говорят по-другому, *аттрактор*. Приравняем, согласно (10), обе правые части уравнений к нулю:

$$\begin{aligned} \dot{x} = y &= 0, \\ \dot{y} = -\omega^2 x &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

и найдем решение аналитически. Система алгебраических уравнений (13) имеет единственное решение, а именно, точку – центр координат фазовой плоскости

$$(x^0=0, y^0=0). \quad (14)$$

Характерный вид решения на фазовой плоскости (для трех различных пар начальных условий) показан на рис. 7.

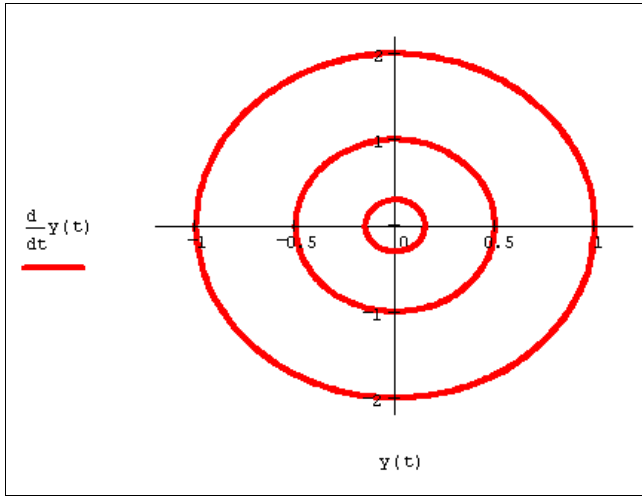


Рис. 7. Фазовый портрет (11) – гармонический осциллятор

Динамическая система уравнений осциллятора с затуханием

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega^2 x + \gamma y, \end{aligned} \quad (15)$$

независимо от начальных условий (x^0, y^0) , приходит в состояние равновесия, точку $(0,0)$ с нулевым углом отклонения и нулевой скоростью (рис. 8).

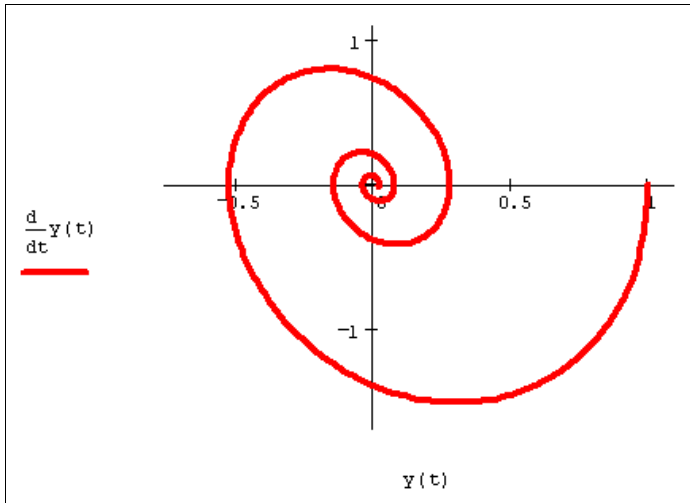


Рис. 8. Решение (15) – осциллятор с затуханием

Слегка усложним нашу модельную задачу, рассматривая не малые колебания, а колебания произвольной амплитуды. Для этого следует в правой части вместо простого линейного слагаемого x взять более точное значение возвращающей силы: $\sin(\omega x)$:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\sin(\omega x) + \gamma y. \end{aligned} \quad (16)$$

Примеры решения (16) показаны на рис. 9 и 10 для случая $\gamma=0$ (пунктир) и $\gamma \neq 0$ (сплошная кривая).

Для поиска аттракторов (16), приравняем правые части уравнения к нулю и опять аналитически решим полученную систему нелинейных алгебраических уравнений. Она имеет уже не единственное решение, а (если рассматривать физически осмысленный диапазон $-\pi \leq x \leq \pi$) два решения:

$$(x^0=0, y^0=0) \text{ и } (x^0=\pi, y^0=0). \quad (17)$$

Нетрудно догадаться, какие положения равновесия описывают две неподвижных точки. Первая точка $(x^0=0, y^0=0)$ – это все то же положение равновесия.

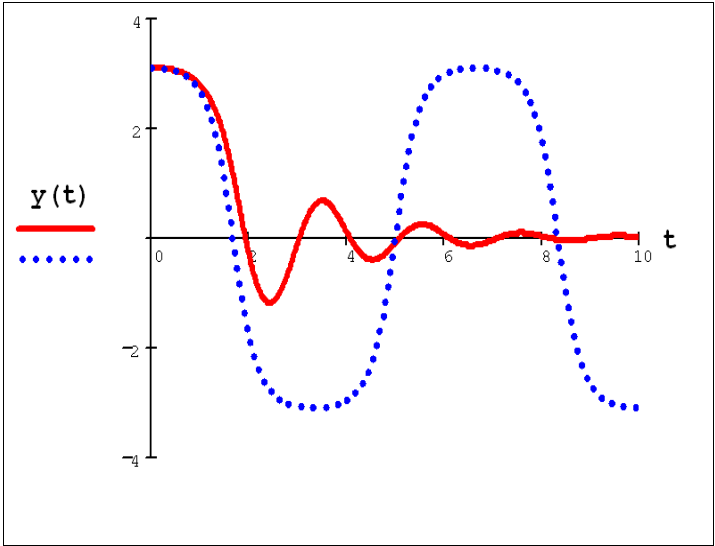


Рис. 9. Решения (16) – негармонические колебания

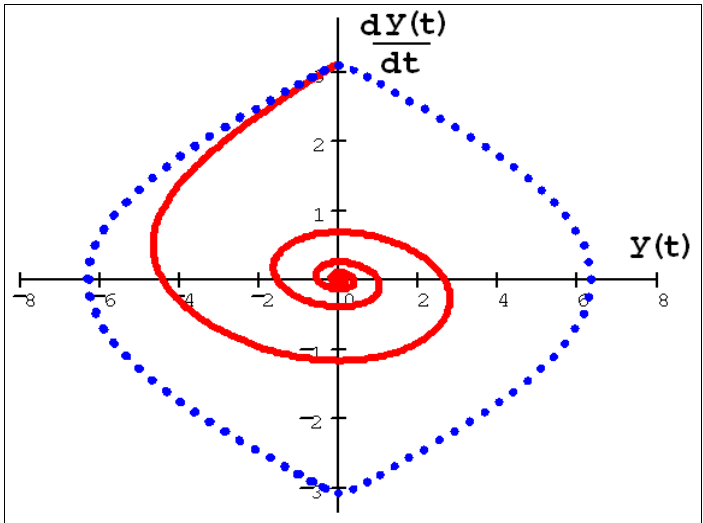


Рис. 10. Решение (16) на фазовой плоскости

Если решать задачу Коши с разными начальными условиями, соответствующую различным начальным условиям модели маятника, то, рано или поздно, маятник, благодаря затуханию,

будет стремиться к этому положению равновесия (сплошные кривые на рис. 9 и 10). Если $\gamma=0$, то колебания будут незатухающими (пунктир на рис. 9 и 10).

Вторая точка $(x^0=\pi, y^0=0)$ – это неустойчивое положение равновесия маятника в верхней точке. Если расположить маятник в точности по вертикали и оставить его с нулевой скоростью в верхней точке, то он так и останется без движения. Однако, если хотя бы минимально отклонить его от этого положения равновесия, т.е. начать решать модельную систему уравнений с начальными условиями, сколь угодно мало отличающимися от $(x^0=\pi, y^0=0)$, то маятник не возвратится в эту точку, а наоборот, начнет совершать колебания и, в конце концов, благодаря затуханию, вернется в положение равновесия $(0,0)$. Такую неподвижную точку, в противовес аттрактору, называют *репеллером*. Именно из окрестности репеллера начинаются колебания, показанные на рис. 9 и 10.

В следующем разделе мы более подробно познакомимся с типами аттракторов и репеллеров, а также выясним, что даже для двумерных систем возможны не только аттракторы в виде неподвижных точек, но и более причудливые аттракторы.

Остановимся теперь на численных методах, применяемых для поиска аттракторов. Для тех простых примеров, которые мы использовали, нам повезло, и мы сумели решить систему нелинейных алгебраических уравнений аналитически. Однако, более сложные динамические системы исследовать аналитически нельзя, поэтому приходится применять численные методы. Для решения алгебраических уравнений и систем нелинейных алгебраических уравнений наиболее часто используются градиентные методы, типа метода Ньютона.

В завершение раздела обобщим сказанное на случай системы N уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dy_1}{dt} &= f_1(y_1, y_2, \dots, y_N, t), \\
 \frac{dy_2}{dt} &= f_2(y_1, y_2, \dots, y_N, t), \\
 &\dots \\
 \frac{dy_N}{dt} &= f_N(y_1, y_2, \dots, y_N, t),
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

для которой требуется найти $y_1, \dots, y_N (t \rightarrow \infty)$. Заметим, что систему ОДУ (18) можно записать в более компактном виде, используя N -компонентные векторные функции $\mathbf{y}(t)$ и $\mathbf{f}(\mathbf{y}, t)$:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t).
 \tag{19}$$

Мы разделим сейчас аттракторы на два больших класса:

1. Аттракторы – *неподвижные точки*, $y_1^0(t=\infty), \dots, y_N^0(t=\infty)$ (или, в наших обозначениях, вектор $\mathbf{y}^0 = \text{const}$);
2. Аттракторы – функции $\mathbf{y}^0(t)$, для которых, при стремлении $t \rightarrow \infty$, решение системы ОДУ (19) не стремится к какому-либо постоянному значению (о них речь пойдет в следующем параграфе).

Рассмотрим аттракторы первого типа, т.е. *неподвижные точки*. Поскольку, по определению, подстановка $\mathbf{y}^0 = \text{const}$ в (19) дает равенство нулю производных в левой части, то условием, определяющим неподвижную точку, будет система обычных (алгебраических) уравнений:

$$\begin{aligned}
 f_1(y_1, y_2, \dots, y_N, t) &= 0, \\
 f_2(y_1, y_2, \dots, y_N, t) &= 0, \\
 &\dots \\
 f_N(y_1, y_2, \dots, y_N, t) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{20}$$

В векторной форме (20) переписется в виде:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{0} \quad .
 \tag{21}$$

Сделанные замечания дают весьма простой рецепт отыскания всех аттракторов динамической системы. А именно, достаточно приравнять нулю правые части ОДУ и решить получившуюся систему алгебраических уравнений (21).

Перед тем, как перейти к примеру, отметим еще один важный аспект исследования динамических систем, связанный с решением уравнений типа (21). Вычисленные таким способом аттракторы могут быть

1. *устойчивыми* (тогда траектории в фазовом пространстве стремятся к ним);
2. *неустойчивыми* (тогда траектории, даже начинающиеся очень близко от особой точки, отталкиваются от нее – такие особые точки называют *репеллерами*);
3. *устойчивыми по одним координатам и неустойчивыми по другим (седловые точки)*.

Заметим также, несколько забега вперёд, что устойчивость аттракторов можно определить путем линеаризации исходной динамической системы в малой окрестности аттрактора и исследованием свойств полученной линеаризованной системы, которая, в силу простоты, может быть решена аналитически.