

§8. Критерии алгоритмов решения ОДУ

Теперь, когда мы уже чуть больше знаем об алгоритмах решения задач Коши для ОДУ, продолжим разговор об их классификации. Остановимся на следующих критериях:

1. согласованность;
2. устойчивость (см. следующий параграф);
3. порядок точности;
4. порядок аппроксимации;
5. эффективность.

В качестве примера будем использовать простейшую явную схему Эйлера (18). Напомним, что дифференциальное уравнение

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y) \quad (53)$$

мы аппроксимировали разностной схемой:

$$\frac{y^{i+1} - y^i}{h} = f^i \quad (54)$$

Важное требование, которому должен отвечать разностный аналог, это *согласованность* разностной схемы. Согласованность означает, что:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{y^{i+1} - y^i}{h} = \frac{dy}{dt} \quad (55)$$

Основанием для выполнения согласованности является разложение y в ряд Тейлора:

$$y(t^i + h) = y(t^i) + \frac{dy}{dt}(t^i)h + \dots \quad (56)$$

Итак, основное требование, есть требование перехода разностной схемы в само ОДУ при $h \rightarrow 0$. Кроме того, часто

бывает желательным, чтобы выполнялось требование симметрии относительно изменения t на $(-t)$. *Симметричные схемы*, как правило имеют лучший порядок точности, нежели несимметричные.

Как написать симметричную схему в нашем случае? Достаточно центрировать разностное уравнение по t . Это означает, что надо взять вместо $f^i \rightarrow f^{i+0.5}$. Так мы делали, как Вы помните, когда говорили о неявном методе Эйлера. Сложность, которая возникает при этом, часто связана с необходимостью решения нелинейного алгебраического уравнения на каждом шаге. Это повлечет за собой дополнительный объем вычислений.

Вслед за критерием согласованности разностной схемы и дифференциального уравнения, рассмотрим критерий *порядка аппроксимации* дифференциального уравнения разностным аналогом. Для того, чтобы выяснить порядок аппроксимации, надо определить погрешности, как левой, так и правой части разностного уравнения. Как вы помните, из §3, посвященного явной схеме Эйлера, мы такую процедуру производили. Получалось, что явная схема Эйлера аппроксимирует дифференциальное уравнение с локальной погрешностью порядка $o(h^2)$.

Напомним, что локальный порядок аппроксимации связан с точностью разностного представления дифференциального уравнения на элементарном шаге его интегрирования. Порядок аппроксимации на всем рассматриваемом интервале на единицу меньше. В случае явной схемы Эйлера локальный порядок аппроксимации составляет $o(h^2)$, а общий $o(h)$. В случае симметричной неявной схемы Эйлера порядок аппроксимации равен $o(h^3)$ для локального интегрирования и $o(h^2)$ для интегрирования уравнения на всем промежутке. Алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка дает локальный порядок аппроксимации $o(h^5)$.

Порядок аппроксимации того или иного алгоритма, как правило, несложно определить. Однако, на практике более важен ответ на другой вопрос: не каков порядок аппроксимации того или иного

разностного уравнения, а с каким *порядком точности* получаемое решение будет соответствовать истинному решению. Предположим, в ходе реализации численного алгоритма мы получили разностное решение, которое обозначим y^i . Это разностное решение существенно зависит от используемого шага h . Главным вопросом, интересующим вычислителя, будет вопрос о том, насколько далеко отстоит это полученное численным методом решение от истинного решения дифференциального уравнения?

Естественно, в реальных расчетах истинного решения мы знать не можем. Лишь в некоторых простых тестовых случаях может быть известен аналитический вид точного решения $\tilde{y}(t)$.

Пример: осциллятор

Приведем конкретный пример решения простого ОДУ, для чего рассмотрим модель осциллятора:

$$\ddot{x}(t) = \frac{F(x)}{m} . \quad (57)$$

Модель осциллятора описывает, к примеру, колебания груза массой m под действием силы $F(x)$. В данном случае x – это смещение груза, а t – время. Линейный осциллятор подразумевает зависимость $F(x) = -Ax$, где $A = \text{const}$. Осциллятор моделируется дифференциальным уравнением второго порядка, и в принципе, вместо него можно решать систему двух дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= V; \\ \dot{V} &= \frac{F}{m}, \end{aligned} \quad (58)$$

что понижает общий порядок ОДУ и позволяет использовать стандартные формулы численных алгоритмов.

Однако, мы не станем решать эту систему уравнений, а сразу напишем разностную схему Эйлера для уравнения второго порядка (57):

$$\frac{x^{i+1} - 2x^i + x^{i-1}}{h^2} = \frac{F^i}{m} \quad (59)$$

Как Вы видите, для аппроксимации этого уравнения мы используем трехточечный шаблон, поскольку вторая производная аппроксимируется тремя точками x^i , x^{i-1} и x^{i+1} . Правую часть уравнения записываем в центральной точке шаблона, т.е. в точке x^i . Если решить выписанное разностное уравнение (59) с соответствующими начальными условиями, то мы получим приближение к решению исходного дифференциального уравнения (рис. 24 и 25).

Оценим, насколько разностное решение отличается от истинного решения дифференциального уравнения. Забудем о том, что для модели осциллятора мы точно знаем аналитическое решение и покажем, как можно оценить порядок точности для любого уравнения, не зная решения наперед.

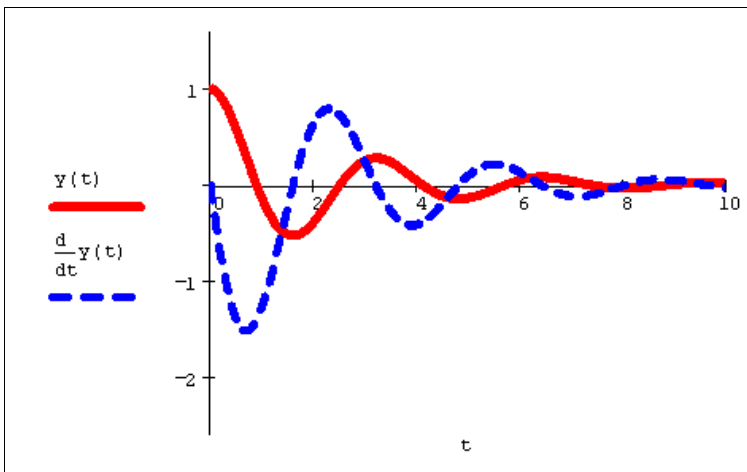


Рис. 24. Решение уравнения осциллятора $y(t)$ и $y'(t)$

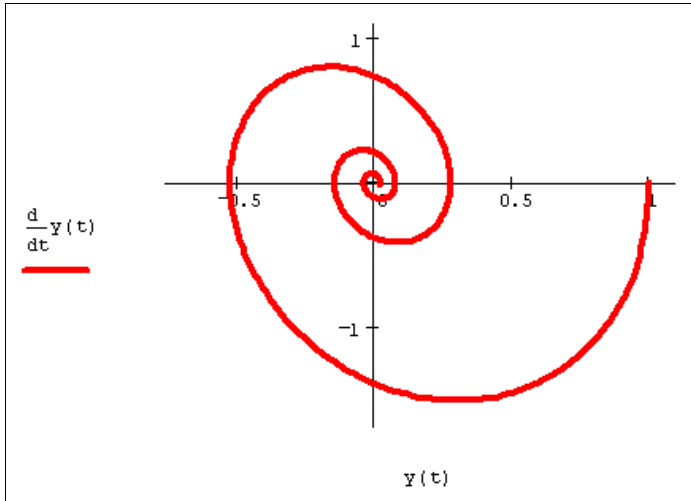


Рис. 25. Решение уравнения осциллятора (на фазовой плоскости)

Обозначим (неизвестное априори) точное решение символом $x_0(t)$. В точках сетки это точное решение будем обозначать как x_0^i , x_0^{i+1} и т.д. Подставим это точное решение в выписанную разностную схему (59):

$$\frac{x_0^{i+1} - 2x_0^i + x_0^{i-1}}{h^2} \approx \frac{F^i}{m}. \quad (60)$$

Поскольку точное решение дифференциального уравнения $x_0(t)$ отличается от того численного решения, которое получается из разностной схемы, сеточное уравнение (60) будет удовлетворено с некоторой погрешностью. Эту погрешность, или по-другому, *невязку* сеточного уравнения запишем в правой части и обозначим символом Δ^i :

$$\frac{x_0^{i+1} - 2x_0^i + x_0^{i-1}}{h^2} = \frac{F^i}{m} + \Delta^i \quad (61)$$

Поскольку сеточное уравнение выражает пересчет шага i , то и погрешность Δ^i мы снабдили индексом i , подчеркнув, что эта погрешность относится к невязке i -го шага реализации разностного уравнения.

Теперь запишем разложение в ряд Тейлора функции $x_0(t=t_i)$ в двух точках: x_0^{i+1} , x_0^{i-1} , т.е. в точках $x_0(t_i)+h$ и $x_0(t_i)-h$:

$$x_0^{i+1} = x_0^i + x_{0\tau}^i + x_0^{\ddot{}} \frac{\tau^2}{2} + x_0^{\ddot{\ddot{}}} \frac{\tau^3}{6} + o(\tau^4) \quad , \quad (62)$$

$$x_0^{i-1} = x_0^i - x_{0\tau}^i + x_0^{\ddot{}} \frac{\tau^2}{2} - x_0^{\ddot{\ddot{}}} \frac{\tau^3}{6} + o(\tau^4) \quad . \quad (63)$$

В разложениях присутствуют производные функции $x_0(t)$ высших порядков. Подставим разложение (62-63) в сеточное уравнение (61) для точного решения x_0 . Если привести слагаемые в левой части сеточного уравнения, то получится следующее выражение:

$$\frac{\ddot{x}_0^i \tau^2 + o(\tau^4)}{\tau^2} = \frac{F^i}{m} + \Delta^i \quad . \quad (64)$$

В правой части остается сумма разностной аппроксимации в точке t_i и невязки Δ . Но, поскольку $x_0(t)$ – это точное решение, то вторая производная $\ddot{x}_0 = \frac{F^0}{m}$, т.е. первые слагаемые в левой и правой частях (64) равны между собой, т.к. они представляют собой ни что иное, как исходное ОДУ, взятое в точке t_i . Еще раз подчеркнем, что равенство этих слагаемых обеспечивается тем, что $x_0(t)$, по предположению, является точным решением. В итоге, мы получаем искомую оценку для невязки:

$$\ddot{x}_0^i \frac{\tau^2}{12} \sim \Delta^i \quad . \quad (65)$$

Как Вы видите, локальная невязка Δ имеет порядок τ^2 . Поэтому говорят, данная разностная схема написана со вторым *порядком точности*. Для той же разностной схемы, которая реализует модель осциллятора, мы могли бы приемами, о которых говорили чуть раньше, оценить и порядок аппроксимации. Получится, что порядок аппроксимации также будет порядка шага в квадрате: $o(\tau^2) \sim \varepsilon^i$.

В большинстве практических случаев порядки аппроксимации и точности оказываются равными. Поэтому для многих схем, порядок аппроксимации которых известен заранее, можно сразу предположить, что и порядок точности полученного разностного решения будет таким же. Однако отметим, что не всегда порядок точности совпадает с порядком аппроксимации. Самый печальный случай этого несовпадения, когда разностное решение вовсе не похоже на точное, связан с *неустойчивостью* алгоритмов и будет разобран в следующем параграфе.

Наконец, последний критерий, о котором хотелось бы упомянуть, это *эффективность* метода. Когда мы говорим об эффективности, то речь, чаще всего, идет о оптимальном соотношении количества компьютерных расчетов, которые используются для достижения реализации этого алгоритма, и точности, которую он предоставляет.

В качестве примера вспомним алгоритмы Рунге-Кутты. В частности, алгоритм Рунге-Кутты 2-го порядка требует на каждом шаге вычисления двух значений правой части ОДУ. Этот алгоритм обеспечивает локальную точность аппроксимации порядка $o(h^3)$. А вот алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка обеспечивает локальную погрешность аппроксимации $o(h^5)$. Между тем, он требует расчетов четырех функций на каждом шаге. Немаловажно и то, что коэффициент слагаемого погрешности $o(h^5)$ достаточно мал, что также улучшает точность метода.

Описанным способом можно сконструировать алгоритмы Рунге-Кутты более высоких порядков, обеспечивающие еще лучшую точность. Однако, они требуют и дополнительных компьютерных расчетов. Как следствие, алгоритм Рунге-Кутты 4-го порядка дает оптимальное соотношение: количество компьютерных расчетов / точность метода, и именно потому он так широко используется в математических пакетах.