§4. Неявный алгоритм Эйлера для ОДУ

Неявный метод Эйлера является, с идеологической точки зрения, совсем небольшим усложнением явного метода. Основная идея всех неявных методов состоит в том, что неизвестные значения y_{i+1} могут входить как в левую, так и в правую части разностного уравнения. В явном методе Эйлера мы записывали правую часть уравнения (15) как $f(t_i,y_i)+o(h)$. Если же записать правую часть не как $f(t_i)$, а как $f(t_{i+0.5})$:

$$f(t_{i+0.5})=(f_i+f_{i+1})/2, \tag{29}$$

то, тем самым, можно повысить точность представления правой части. Проводя выкладки, аналогичные (21-25), нетрудно убедиться, что в этом случае погрешность будет составлять $o(h^2)$. Домножив обе части уравнения на h, получим, что локальная погрешность пересчета каждого шага от y_i к y_{i+1} равна $o(h^3)$, что дает оценку общей погрешности интегрирования на интервале 0...1, равную $o(h^2)$.

Вся беда состоит в том, что на каждом шаге интегрирования, т.е. для каждого t_i мы не знаем значение y_{i+1}. Записав дискретный аналог (15) с учетом представления (29), мы увидим, что значение y_{i+1} присутствует не только в левой, но и в правой части разностного уравнения:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=\frac{f(t_i,y_i)+f(t_{i+1},y_{i+1})}{2} \quad . \tag{30}$$

Неизвестное пока значение y_{i+1} входит в качестве аргумента в функцию $f(t_{i+1},y_{i+1})$. Как быть в этом случае? Конечно, для определения y_{i+1} на каждом шаге нам придется, вообще говоря, решать нелинейное алгебраическое уравнение (30). В некоторых, наиболее простых случаях, удается решение этого уравнения аналитически. В частности это возможно для линейной, как в (28), функции $f(t_i,y_i)$.

В общем случае, для вычисления y_{i+1} необходимо решать алгебраическое уравнение (30) численными методами (например, при помощи алгоритма Ньютона, взяв в качестве начального приближения значение y_i). Таким образом, решая на каждом шаге алгебраическое уравнение, мы получим серию y_1 , y_2 и т.д. В итоге, ценой за достижение лучшей точности будет дополнительный объем вычислений, который может быть довольно громоздким. Помимо лучшей точности неявный метод Эйлера имеет еще одно, сразу не очень заметное, преимущество над явными методами. А именно, существует целый класс дифференциальных уравнений, называемых жесткими. Об их определении и свойствах мы еще будем говорить (см. §10), а пока ограничимся сведениями о том, что жесткие уравнения лучше решаются неявными методами, нежели явными (которые, как правило, для решения жестких уравнений непригодны).

В заключение, обратимся к конкретному примеру использования неявного метода Эйлера для решения того же самого ОДУ, которое мы решали явным методом в прошлом разделе:

$$\frac{dy}{dx} = -5y \quad . \tag{31}$$

Сразу обратим Ваше внимание, что это дифференциальное уравнение *линейно* относительно y. Оно имеет простое аналитическое решение (27) в виде экспоненты, и мы его использовали лишь ради примера, чтобы иметь возможность сравнить результаты численных расчетов с точным решением. Как уже было сказано, поскольку уравнение линейное, то на каждом шаге интегрирования дифференциального уравнения нам не придется решать нелинейного уравнения.

Действительно, в правой части схемы (30) стоит значение $f(y_{i+1})=-5y_{i+1}$. Можно перенести $-5y_{i+1}$ в левую часть и просто решить линейное уравнение. В этом случае, поскольку мы использовали такую тривиальную задачу, мы получим сразу формулу пересчета y_{i+1} через y_i неявной схемы, подобно явной схеме Эйлера.

Кроме того, по причинам, которые мы разберем чуть позднее, используем некоторое упрощение данной схемы:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=f\left(t_{i+1},y_{i+1}\right) \quad , \tag{32}$$

т.е. возьмем в правой части (30) вместо полусуммы $(f_i+f_{i+1})/2$ просто значение в правой точке шага $f(t_{i+1},y_{i+1})$.

Видно, что в данном простом случае неявный алгоритм Эйлера дает чуть лучшую точность, нежели явный метод, однако имеет тот же порядок точности (рис. 16 и 17). Еще раз подчеркнем, что, из-за простоты выбранного модельного случая, нам не пришлось решать на каждом шаге реализации неявного метода Эйлера нелинейного уравнения.

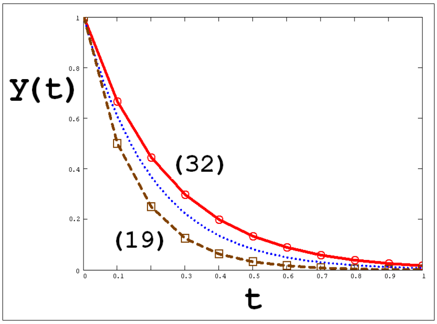

Рис. 16. *Решение (26) при помощи явной (19) и неявной (32) схем Эйлера*

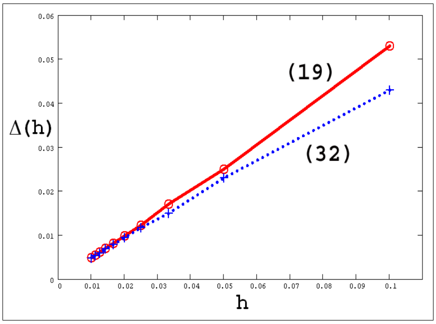

Рис. 17. *Точность решения (26) для явной и неявной схем Эйлера в зависимости от шага*

Пример: схемы Эйлера для логистического уравнения

Приведем еще один пример использования неявной схемы Эйлера, вернувшись к логистической модели (7), которая описывается нелинейным ОДУ:

$$\frac{dy}{dt}=Ay-By^2 \quad , \tag{33}$$

имеющем аналитическое решение

$$y(t)=\frac{1}{B+(1/y_0-B)\exp(-A\cdot t)} \quad . \tag{34}$$

Подстановка (33) в формулу метода (32) даст нам следующее нелинейное алгебраическое уравнение для i-го шага:

$$\frac{y_{i+1}-y_i}{h}=Ay_{i+1}-By_{i+1}^2 \quad . \tag{35}$$

Графическое представление уравнения (35), которое можно символически обозначить как $f(y_{i+1})=0$, иллюстрируется рис. 18. Точка пересечения кривой с осью X дает его корень, т.е. искомое значение y_{i+1}.

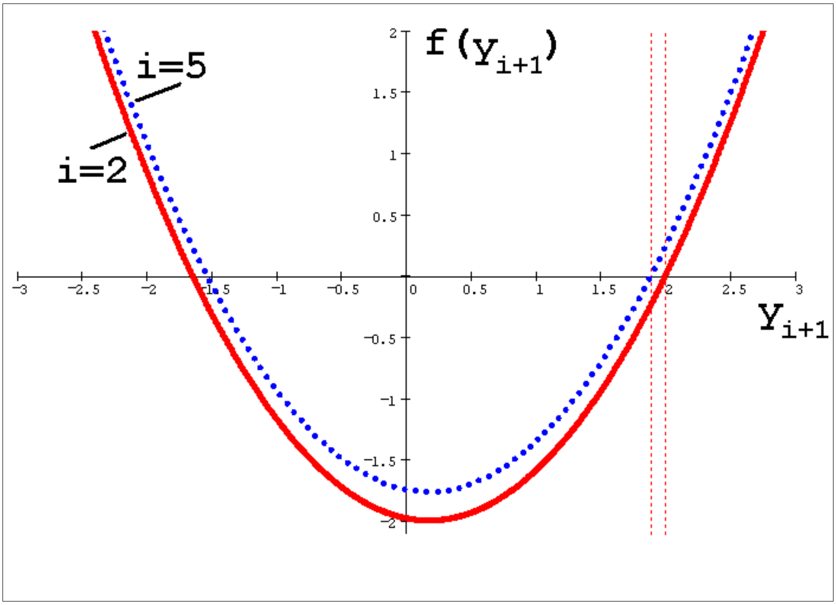

Рис. 18. *Нелинейное уравнение для i-го шага*

Заметим, что, во-первых, уравнение (35) – квадратичное, и его опять можно было бы решить точно. Однако, мы, все-таки воспользуемся численным методом (Ньютона), чтобы проиллюстрировать подход к реализации неявных схем. Вовторых, уравнение (35) имеет не один, а несколько (точнее, два, т.к. оно квадратичное) корней – искомое значение y_{i+1} и один паразитный корень. На каждом шаге необходимо отыскать один из них (правильный), что в данном случае несложно сделать, выбирая в качестве начального приближения метода Ньютона известное значение y_i с предыдущего шага интегрирования. В более сложных случаях имеется опасность выбрать неверный корень, что будет означать срыв на ветвь неправильного решения ОДУ.

Полученное решение (сплошная кривая), наряду с точным решением (34) (точки) и результатом применения явной схемы (пунктир), изображено на рис. 19.

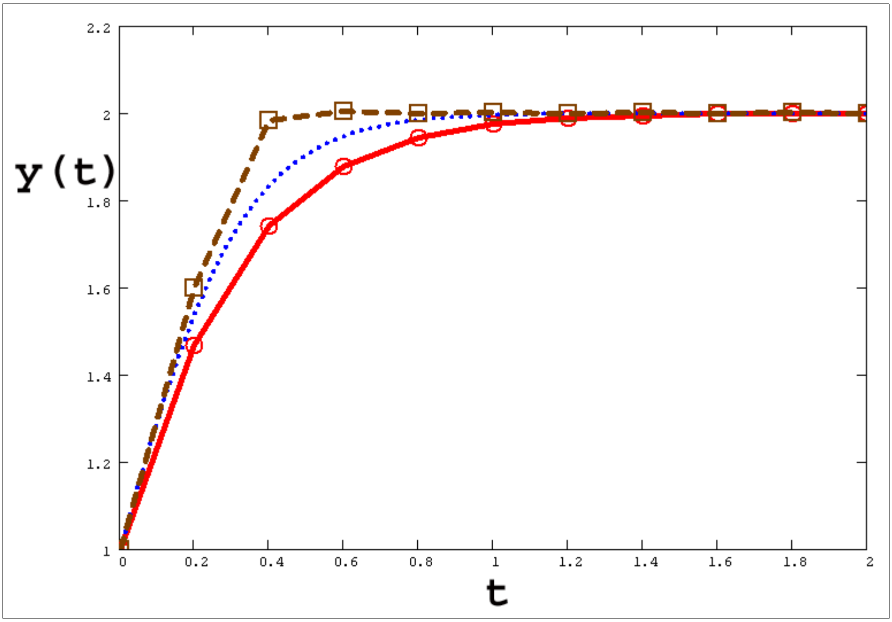

Рис. 19. *Решение (33) по явной и неявной схемам Эйлера*