§3. Явный алгоритм Эйлера

Мы надеемся, что сделанные предварительные замечания дали читателю хорошее представление о рассматриваемом круге проблем. Перейдем теперь к обсуждению численных алгоритмов решения задач Коши для ОДУ, сконцентрировавшись на методах решения одного уравнения:

$$\frac{dy(t)}{dt}=f(y,t) \tag{15}$$

с начальным условием

$$y(0)=y_0=\text{число}. \tag{16}$$

Обобщение алгоритмов на систему произвольного числа уравнений не несет, в большинстве случаев, принципиальных отличий и будет обладать теми же характерными свойствами.

Все численные методы решения ОДУ основаны на аппроксимации дифференциальных уравнений разностными аналогами. В зависимости от конкретной формы аппроксимации, получаются алгоритмы различной точности и быстродействия.

Рассмотрим сначала самый простой из алгоритмов, являющийся наиболее наглядным, однако в настоящее время практически не использующийся, ввиду малой точности.

Самый очевидный способ решения ОДУ (15) на компьютере – это дискретизация расчетного интервала (рис. 12) и замена производной в левой части $\frac{dy(t)}{dt}$ разностным аналогом.

Для некоторой i-й точки сетки разностная производная определится следующим образом:

$$\frac{dy(t_i)}{dt} \approx \frac{y_{i+1} - y_i}{h} \quad . \tag{17}$$

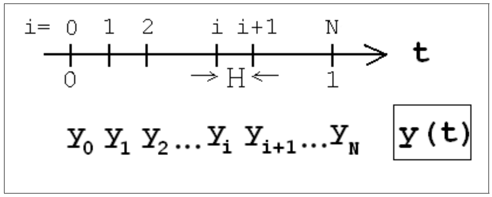

Рис. 12. *Сетка*

Для того, чтобы схема имела простое решение, правую часть уравнения (15) возьмем в той же точке t_i:

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = f(t_i, y_i) \quad . \tag{18}$$

Таким образом, мы сразу получаем рекуррентную формулу определения нового значения y в точке t_{i+1}, т.е. y_{i+1} по значению y в точке t_i. Это значение обозначим как y_i. А y_{i+1} запишем как:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f_i \quad . \tag{19}$$

Зная из начального условия (16) значение y_0, мы сразу, согласно (19), определим y_1. По y_1 определяем y_2 и т.д. В результате мы быстро проинтегрируем дифференциальное уравнение на нужном интервале, например для t=0...1. В результате мы получим решение *разностного уравнения* (18) в узлах сетки:

$$y_{0,}\, y_{1,}\, y_{2,} \ldots y_i, \ldots y_N \leftarrow \tilde{y}(t) \tag{20}$$

Попутно отметим, что численное решение для любого (в том числе, промежуточного t) может быть получено при помощи интерполяции сеточной функции (20) между узлами сетки.

Ключевым моментом для построенного алгоритма будет точность, с которой определится y(t). На самом деле, сеточное решение, найденное численно, будет отличаться от истинного решения дифференциального уравнения. Так будет происходить, в первую очередь, потому, что мы написали данную схему Эйлера и предложили соответствующий численный алгоритм с некоторой погрешностью.

Действительно, как левая, так и правая часть у нас представлена в разностном уравнении (18) с погрешностью. Слева находится разностный аналог производной, определяемый формулой (17), который, как известно, имеет точность o(h).

Погрешность представления правой части уравнения определить чуть сложнее. Для ее оценки запишем разложение функции $f(t_i,y_i)$ в точке t_i в ряд Тейлора:

$$f_{i+1}=f_i+h\cdot\frac{df}{dt} \quad . \tag{21}$$

Производную сложной функции f(t) можно записать через через частные производные этой функции по t и по y:

$$f_{i+1}=f_i+h\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+h\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t} \quad . \tag{22}$$

Более высокие слагаемые по h имеют размерность h^2 и выше. Заметим, что из самой постановки задачи (15) следует, что $\frac{\partial y}{\partial t}=f(t_i)$. Это приводит к следующей оценке:

$$f_{i+1}=f_i+h\cdot\frac{\partial f}{\partial t}+h\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f_i+o(h^2) \quad . \tag{23}$$

Теперь нам осталось из основного соотношения метода Эйлера выразить искомую y_{i+1} через y_i с оценкой ошибки этого представления.

$$y_{i+1}-y_i+h\cdot o(h)=h\cdot f_i+h\cdot o(h^2) \quad . \tag{24}$$

Поскольку мы умножаем обе части соотношения на h, то ошибка будет иметь порядок $o(h^2)$:

$$y_{i+1}-y_i+o(h^2)=h\cdot f_i+o(h^3) \quad . \tag{25}$$

Таким образом, осуществляя (на каждом шаге) интегрирование по разностной схеме Эйлера исходного ОДУ, мы добавляем погрешность порядка $o(h^2)$. Казалось бы, эта погрешность не такая плохая, и метод Эйлера можно использовать для решения ОДУ. Однако, следует помнить о том, что интегрирование проводится на целом промежутке от 0 до 1. По постановке задачи, мы используем N разбиений этого интервала (N узлов), т.е. шаг сетки равен $h = \frac{1}{N}$.

Для того, чтобы проинтегрировать по схеме Эйлера наше уравнение на всем промежутке, потребуется пересчитать N раз искомое y_{i+1}. В результате, по мере интегрирования будет происходить накопление ошибки. Например, y_1 мы пересчитываем через точно известное y_0 с погрешностью h^2. Затем (не совсем точное) y_1 мы используем для определения y_2, опять-таки накапливая погрешность h^2 и т.д. За счет такого накопления мы получим суммарную погрешность порядка $N \cdot o(h^2)$.

Поскольку $N = \frac{1}{h}$, то общая погрешность интегрирования составит на конце интервала не $o(h^2)$, а всего лишь $o(h)$. Это очень плохая точность для рассматриваемого класса алгоритмов. Именно поэтому метод Эйлера практически никогда не применяется при решении задач Коши для ОДУ. Для них существуют более эффективные методы, о которых мы поговорим позднее.

Однако, во-первых, полученные формулы чрезвычайно просты для восприятия; во-вторых, более сложные алгоритмы обладают теми же закономерностями, что и алгоритм Эйлера; и, наконец, для более сложных задач (краевых задач для ОДУ и уравнений в частных производных) схемы Эйлера являются основным методом решения. Поэтому мы уделим алгоритму Эйлера серьезное внимание, тем более, что на основе его идей можно построить более сложные и практически значимые методы.

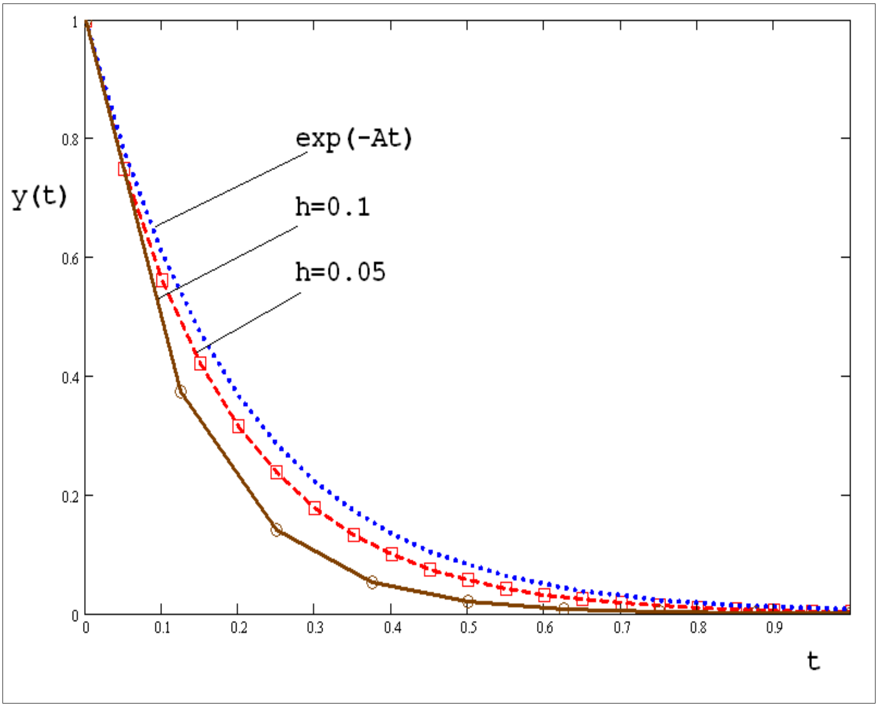

Рис. 13. *Решение (26) формулой (19), h=0.1 и h=0.05*

В завершение приведем пример интегрирования конкретного ОДУ с помощью метода Эйлера. Решим по формуле (21), используя разные значения шага h, *линейное* уравнение (рис. 13):

$$\frac{dy}{dt} = -5y \quad , \tag{26}$$

т.е. в нашем случае f(t,y)=-5y. Точное решение (26) равно:

$$y=y_0\cdot\exp(-5t). \quad (27)$$

Проведем теперь серию расчетов по формуле (19) для разных h и оценим его погрешность Δ(h), т.е. среднее отличие численного решения от точного решения (27) в узлах сетки. Из рис. 14 видно, что погрешность, как и ожидалось, близка к линейной функции h:

$$y(t_i)=y_i+o(h). \quad (28)$$

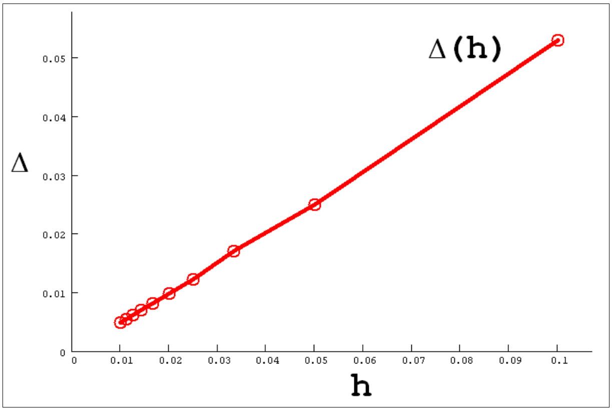

Рис. 14. *Зависимость точности метода от шага h*

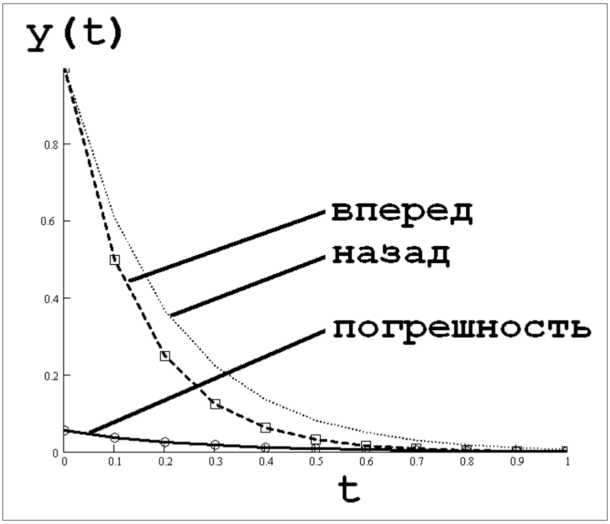

Рис. 15. *Интегрирование (26) от 0 до 1 и от 1 до 0*

Скажем несколько слов о достаточно надежном методе контроля решения ОДУ методом Эйлера. Проинтегрировав ОДУ на промежутке от 0 до 1, можно затем повторить его на промежутке от 1 до 0, т.е. в обратном направлении (рис. 15). В этом случае в качестве начального условия следует брать вычисленное при первом интегрировании значение y(1). Получив в результате второго интегрирования значение y(0), можно сравнить его с исходным начальным условием y_0. Абсолютное значение полученной разницы даст довольно надежную оценку погрешности всего интегрирования.