§6. Спектральный анализ

Спектральный анализ является одним из самых мощных инструментов обработки эксперимента. В частности, он используется для анализа данных, выявления характерных частот, в целях подавления шума и т.д.

Спектром совокупности данных y(x) называют некоторую функцию другой координаты (или координат, если речь идет о многомерном спектре) F(ω), полученную в соответствии с определенным алгоритмом. Примерами спектров являются преобразование Фурье, спектр мощности, вейвлет-преобразование.

Преобразование Фурье

Начнем с рассмотрения Фурье-спектра. Математический смысл преобразования Фурье состоит в представлении сигнала y(x) в виде бесконечной суммы синусоид вида $F(\omega)\cdot\sin(\omega x)$. Функция F(ω) называется *преобразованием Фурье*, или *интегралом Фурье*, или *Фурье-спектром* сигнала. Ее аргумент ω имеет смысл частоты соответствующей составляющей сигнала. Обратное преобразование Фурье переводит спектр F(ω) в исходный сигнал y(x).

Согласно определению,

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} y(x)\cdot\exp(-i\omega x)\,dx \quad . \qquad (31)$$

Из определения (31) видно, преобразование Фурье является комплексной величиной, даже если сигнал действительный.

Преобразование Фурье имеет огромное значение для различных математических приложений, и для него разработан очень эффективный алгоритм, называемый *алгоритмом БПФ* (быстрым преобразованием Фурье). Он настолько популярен, благодаря своей супер-экономичности, что практически во всех математических пакетах организован в виде подпрограммы.

Алгоритм БПФ имеет довольно сильное ограничение, которое на практике не является критичным. Дело в том, что аргумент прямого Фурье-преобразования, т. е. объем выборки $y(x_i)$, должен иметь ровно 2^n элементов (n – любое целое число). Соответственно, результатом работы алгоритма БПФ является вектор с $1+2^{n-1}$ элементами. Если число данных не совпадает со степенью 2, то для запуска алгоритма БПФ достаточно дополнить недостающие элементы нулями.

Рассмотрим сначала наиболее типичную для физического эксперимента ситуацию расчета Фурье-спектра действительного сигнала. Чтобы смысл преобразования Фурье был более понятен, используем в качестве модельных данных дискретизацию следующего детерминированного сигнала (рис. 60):

$$y(x)=1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot0.05\cdot x)+0.5\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot0.1\cdot x)+0.1\cdot\sin(2\cdot\pi\cdot0.5\cdot x). \qquad (32)$$

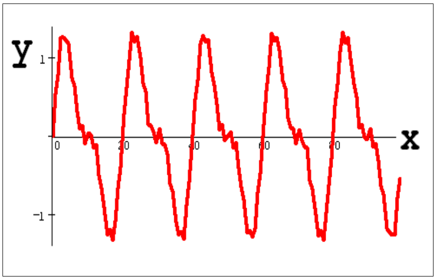

Рис. 60. *Модельные данные*

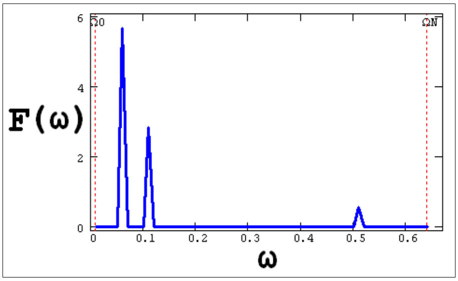

Рис. 61. *Выборочный Фурье-спектр*

На рис. 61 представлены результаты работы алгоритма БПФ в виде модуля Фурье-спектра |F(ω)|, поскольку, повторимся, сам спектр является комплексным. Очень полезно сравнить полученные амплитуды и местоположение пиков спектра на рис. 61 с определением синусоид в формуле (32).

Показательно, что, если подвергнуть полученное абсолютное значение Фурье-спектра (рис. 61) обратному преобразованию

Фурье, возможность которого также предоставляет алгоритм БПФ, то профиль исходного сигнала будет реконструирован правильно, но окажется сдвинутым на определенное расстояние вдоль оси x (рис. 62). Так происходит из-за того, что взятие абсолютной величины комплексного спектра уничтожает информацию об относительной фазе отсчетов данных. В остальном, сигнал y(x) восстановлен с большой точностью, что характерно для плавного изменения сигнала. Если же в качестве входных данных обратного преобразования Фурье использовать комплексный Фурье-спектр, то совпадение будет полным.

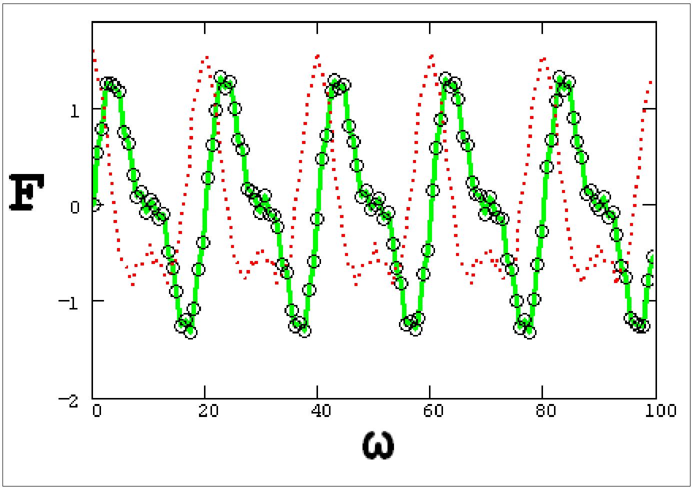

Рис. 62. *Обратное преобразование Фурье комплексного (кружки) и действительного (точки) Фурье-спектра*