§4. Методы Монте-Карло

Для моделирования различных физических, экономических и прочих эффектов широко распространены методы, называемые методами Монте-Карло. Они обязаны своим названием европейскому центру азартных игр, основанных на случайных событиях. Основная идея этих методов состоит в создании определенной последовательности псевдослучайных чисел, моделирующей тот или иной эффект, например, шум в физическом эксперименте, случайную динамику биржевых индексов и т. п.

Генераторы (или, по-другому, *датчики*) случайных чисел заложены практически во все пользовательские компьютерные программы. По крайней мере, генераторы равномерного распределения присутствуют повсеместно, где можно представить себе возможность применения псевдослучайных чисел (рис. 40). Здесь и далее мы будем представлять, из соображений наглядности, векторы случайных чисел именно так: одна выборка (т.е. компоненты одного из случайных векторов **x**) по оси абсцисс, а другая выборка (другой случайный вектор **y**) – по оси ординат.

Как мы уже отмечали (см. §2), особую роль в статистике играет *нормальное* (по-другому, *гауссово*) распределение. Если программы, которые Вы используете для расчетов, не имеют встроенного генератора случайных чисел с нормальным распределением, то перейти к нему можно от пары чисел с равномерным распределением (обозначим их x и y) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{2\ln(1/x)}\cos(2\pi y) \\ y_1 &= \sqrt{2\ln(1/x)}\sin(2\pi y) \end{aligned} \qquad (17)$$

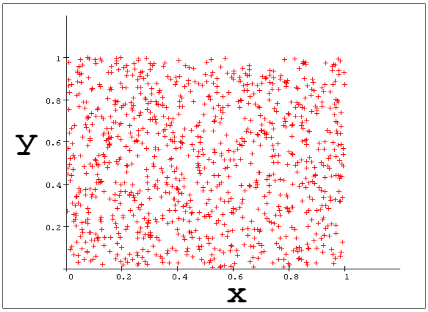

Рис. 40. *Псевдослучайные числа с равномерным распределением*

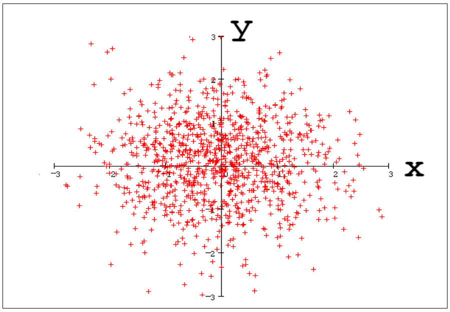

Рис. 41. *Псевдослучайные числа с гауссовым распределением (m=0, σ=1)*

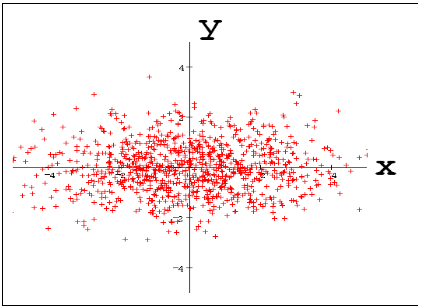

Рис. 42. *Псевдослучайные числа с гауссовым распределением m=0,σ=1 и m=0,σ=2*

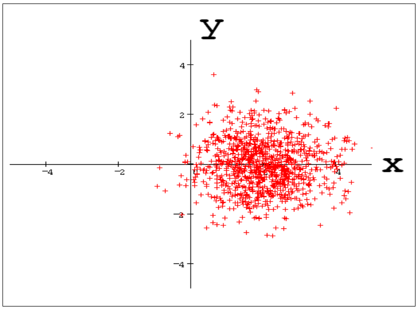

Рис. 43. *Псевдослучайные числа с гауссовым распределением m=0,σ=1 и m=2,σ=1*

Пример псевдослучайной выборки с гауссовым распределением показан на рис. 41. Среднее значение распределения принято равным 0, а дисперсия – равной 1. Отметим, что эти значения задают генеральное распределение, являясь аргументами генератора случайных чисел. Выборочные значения среднего и дисперсии, вычисленные согласно формулам (1-2), будут отличаться от генеральных характеристик.

Чтобы лучше ориентироваться в смысле среднего и дисперсии, обратите внимание на рис. 42 и 43, на которых приведены другие выборки псевдослучайных чисел (каждая объемом $N=10^3$ точек) с гауссовым распределением.

Соответствующие гистограммы распределения (для X-координат точек на рис. 42-43) приведены на рис. 44. Для того, чтобы перейти от случайного числа x со средним m и среднеквадратичным отклонением σ к числу X со средним M и среднеквадратичным отклонением Σ достаточно использовать формулу:

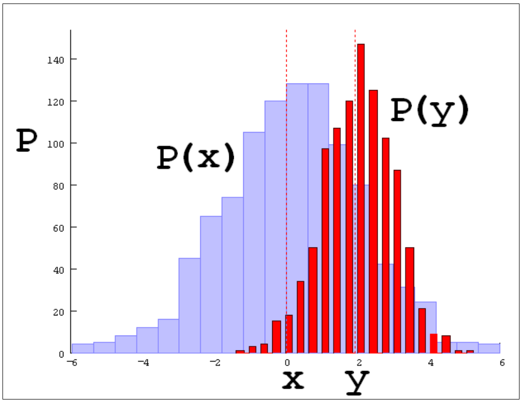

Рис. 44. *Гистограммы для выборок рис. 42-43*

$X=(M-m)+x\cdot\Sigma/\sigma$. (18)

В ряде задач моделирования эксперимента надо осуществить генерацию псевдослучайных чисел с заданным законом распределения p(x), который может задаваться довольно сложной формулой. В этом случае удобно пользоваться алгоритмом *«прием – отказ»*, предложенным фон Нейманом. Он подразумевает генерацию пар случайных чисел. Одно из них X1 должно иметь плотность распределения P(x), которую следует нормировать не на 1, а на некоторую константу C>1 так, чтобы для любого x было выполнено соотношение $C\cdot P(x)>p(x)$. Для второй случайной величины X2 подойдет равномерное распределение.

Суть алгоритма заключается в том, что в выборку включаются не все X1, а только те из них, для которых их пары X2 лежат под кривой p(x), т.е. для которых $X2/(C\cdot P(X2))<p(X1)$ (рис. 45). Таким образом, одни числа X1 принимаются в окончательную выборку, а другим в приеме отказывается. Вероятность приема в выборку числа X1 тем больше, чем больше значение p(X1).

До сих пор речь шла о генерации *независимых* случайных величин (конечно, с оговоркой на качество самого алгоритма генерации, который, вообще говоря, редко выдает выборку с нулевой корреляцией). Для того, чтобы получить две выборки с *корреляцией*, равной R, достаточно сначала осуществить генерацию пары двух независимых чисел X1 и X2, а затем вместо X2 использовать линейную комбинацию этих чисел (назовем ее Y1):

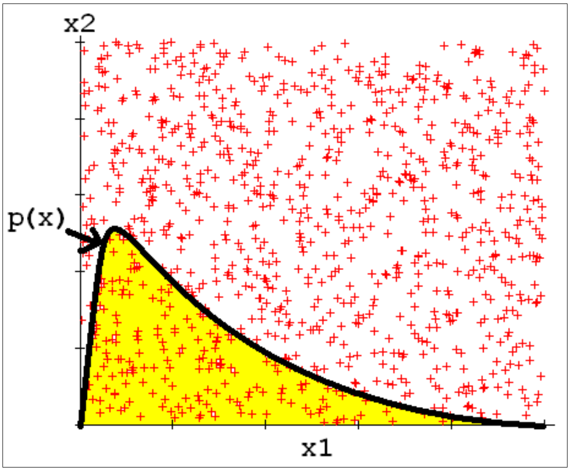

Рис. 45. *Иллюстрация алгоритма «прием-отказ»*

$$Y1 = R \cdot X1 + \sqrt{1 - R^2} \cdot X2 \quad . \tag{19}$$

Случайные числа X1 и Y1 будут иметь коэффициент корреляции, равный R (о том, как рассчитывается выборочный коэффициент корреляции, будет написано ниже). На рис. 46 приведено несколько примеров пар случайных чисел с разным коэффициентом корреляции.

Статистические характеристики, устанавливающие связь между случайными числами, называются ковариацией и корреляцией (или, по-другому, коэффициентом корреляции). Они различаются нормировкой, как следует из их определения. Коэффициент попарной корреляции двух выборок **y** и **z** (средние и дисперсии которых равны соответственно m_y, m_z, D_y и D_z) вычисляется следующим образом:

$$R = \frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{(y_i - m_y) \cdot (z_i - m_z)}{\sqrt{D_y \cdot D_z}} \quad . \tag{20}$$

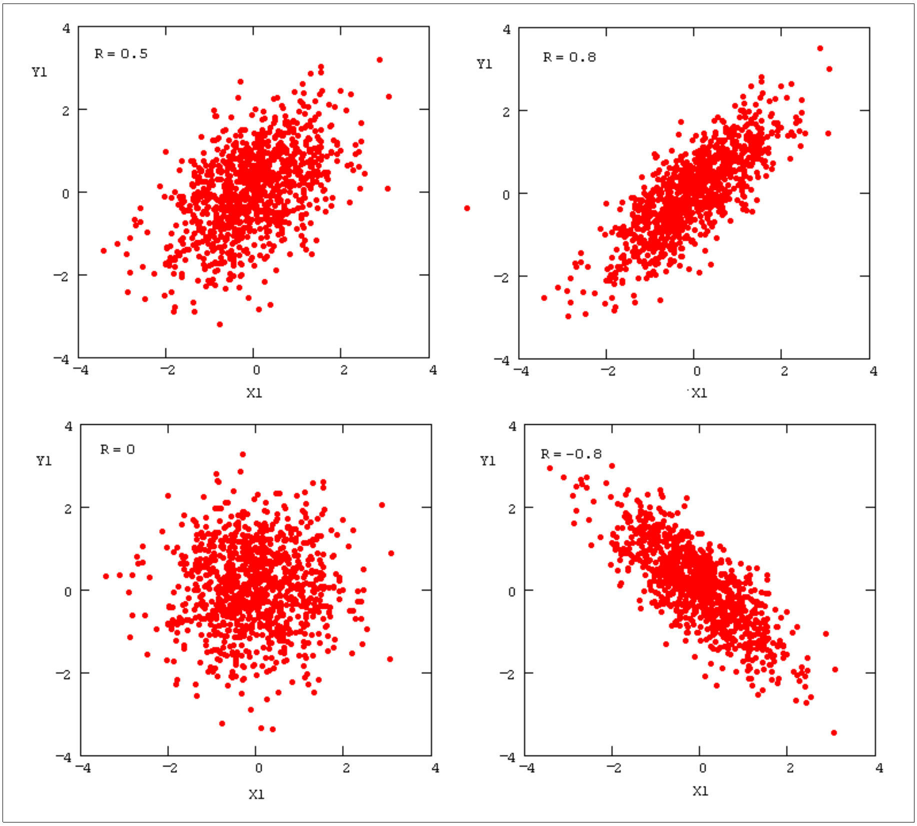

Рис. 46. *Случайные числа с разной корреляцией*

Если R=0, то случайные числа *не коррелированы*, если R=1, то они линейно-зависимы, т.е. $y=const_1 \cdot z+const_2$ (где $const_1$ и $const_2$ – константы).

Возвращаясь к данным о курсе доллара и евро (см. рис.1 и 11), мы можем отметить, что они очень сильно коррелированы. Более конкретно, оценка (20) для этих данных дает коэффициент корреляции, равный R≈0.9. Это означает, что приведенная на рис. 1 динамика курсов валют обусловливается, главным образом, колебанием кросс-курса доллар-евро, а их отношение к российскому рублю лишь отражает этот эффект. Если сравнить рис. 11 и рис. 46, то мы легко рассмотрим эту зависимость, которая отражает смысл отрицательной корреляции: дорогой доллар – дешевый евро и дешевый доллар – дорогой евро.

Если изучать корреляцию последовательных случайных чисел в пределах одной выборки, то коэффициент корреляции заменяется функцией автокорреляции R(j). Вычислить ее, используя выборку из M последовательных случайных чисел, можно следующим образом:

$$R(j)=\frac{1}{N-2M}\cdot\sum_{i=M}^{N-M}\frac{(y_{i+j}-m)\cdot(y_i-m)}{D} \quad . \tag{21}$$

Аналогично вычисляется функция взаимной корреляции двух различных выборок.

$$R(j)=\frac{1}{N-2M}\cdot\sum_{i=M}^{N-M}\frac{(y_{i+j}-m)\cdot(z_i-m)}{\sqrt{D_x\cdot D_y}} \tag{22}$$

В следующем параграфе мы приведем примеры вычисления корреляционных функций для модельных случайных процессов. В заключение рассчитаем график зависимости выборочного среднего значения, вычисленного по формуле (1), от объема выборки (рис. 47). Любопытно, что до некоторого N~500 относительная погрешность определения среднего значения уменьшается, как это и предсказывает математическая статистика, пропорционально $1/\sqrt{N}$, а затем остается практически постоянной, что говорит о несовершенстве датчика случайных чисел.

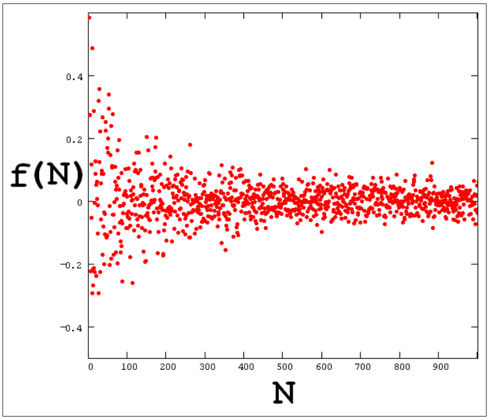

Рис. 47. *Выборочное среднее f(N) как функция объема выборки N*